アノマリー・マッチングのQCDへの応用

谷崎　佑弥

1. 量子色力学（QCD）について

素粒子の世界を記述する現在の標準模型は，馴染みの深い電磁気学と弱い力を記述するWeinberg-Salam理論と，強い力を記述する量子色力学(**Q**uantum **C**hromo**D**ynamics, QCD) からなっている．QCDは非可換ゲージ理論を用いて記述され，そのラグランジアン$\mathcal{L}$は，

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}^2)+\sum_{f=1}^{N_f}\overline{q}_f(\gamma_\mu D_\mu-m_f)q_f,\ (1)$$

と与えられる．ここで，$F_{\mu\nu}$は強い力における電磁場のようなもので，クォークqの間を媒介する力の場（カラー場, $SU(N_c)$ゲージ場）の強さを記述する．ここでは，クォークの種類がN_fだけあるQCDを考えており，この種類のことはフレーバーと洒落た名前で呼ばれている．

このQCDというのは非常に興味深いが，同時にとても厄介な理論でもある．QCDが司る強い力というのは，我々の身の回りにある陽子や中性子がより小さな粒子であるクォークからどのように構成されるか，そしてその陽子，中性子があつまってどのように原子核をつくるのか，という現象を原理的には記述してくれている．色々と約束事はあるものの，上に書いたたった1行の式から核力といった複雑な現象のすべてが導かれるのは大変に魅力的である．ただし「原理的にはできる」とはいったものの，実際のところ我々はこの理論を手計算で定量的にはできないのが悩ましい．具体的な予言のために，我々は数値計算によるシミュレーションを通して理解しているのが現状である．

さて，定量的な解析は無理だとしても，なにか定性的な性質を厳密に得ることはできないものか? なんと，驚くべきことにこれができてしまう！

では，これがいつ何に対してできるのか？ということを，QCDの物理を通して本稿ではお話していきたい．

2. QCDと自発的なカイラル対称性の破れ

QCDの難しさを理解する上で，欠かすことのできない大きな事実がいくつかある[1)]．

- 核力の短距離性：ラグランジアンにはカラー場の質量が存在しないにもかかわらず，量子理論には質量ギャップが存在する．
- クォークの閉じ込め：ラグランジアンにはクォークがいるが，我々の身の回りではそれらは陽子，中性子，中間子などハドロンの中にしか存在せず，クォーク単独の状態は物理的でない．

ここに，QCDの定量的計算の難しさを垣間見ることができる．ラグランジアンを見れば問題が厳密には解けなくとも，その理論の大まかな振る舞いを見て取れることはしばしばある．しかしQCDなどの強結合と呼ばれる理論の場合，その期待は定性的にも裏切られてしまう．このような困難にあっても，QCDが強い力を支配する理論だと確

信を持てるのは，数多くの実験事実と数値計算の成功に支えられているためである．

さて，直接的なアプローチではこのように定量的どころか定性的にも解くことが難しい問題にあたったとき，その理解の鍵となるのは**対称性**である．そして，QCD の対称性に関する最も重要な現象の一つに**カイラル対称性の自発的破れ**がある．

カイラル対称性とは，QCD においてクォークのカレント質量を $m_f = 0$ とおいた場合に出る（実際の QCD においては近似的な）対称性である．この対称性は $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ という群で指定されるが，QCD の真空はクォーク・反クォーク対の凝縮，

$$\langle \overline{q}_f q_f \rangle \simeq -(0.2\mathrm{GeV})^3, \tag{2}$$

が存在するためにその一部である対角部分群 $SU(N_f)_{L+R}$ のもとでしか不変ではない．これをカイラル対称性の自発的な破れと呼ぶ．つまり，QCD の真空は決してその言葉から類推されるような空っぽの状態ではない．クォークが相互作用した非自明な結果として現れる最低エネルギー状態である，ということが示唆される．

カイラル対称性の破れは，QCD が完成するより前に南部と Jona-Lasinio によって明らかになった[2]．後のカレント代数や現象論的なラグランジアンの研究の成果として[3]，対称性とその破れ方を指定するだけで低エネルギーの南部-Goldstone 粒子の振る舞いが決定してしまう．QCD の場合，この南部-Goldstone 粒子が π 中間子たちであり，カイラル対称性による自発的破れがその性質を非常にうまく説明できた．そして，強い力の理論が QCD だと知る以前からカイラル対称性の破れが成功できたのは，対称性の普遍的な予言能力の賜物だったと言えるだろう．

3. カイラル対称性とアノマリー・マッチング

カイラル対称性の自発的破れを仮定するだけで，QCD を解かなくとも π 中間子らの性質を予言できる．では，そもそもなぜ QCD でカイラル対称性が自発的に破れるのだろうか．実は，この疑問にも対称性をつぶさに見れば部分的に答えることができてしまう．このとき重要となるのが，**'t Hooft のアノマリー・マッチング**という定理である[4]．

3.1 't Hooft アノマリー

この定理を説明するために，便利な言葉として**'t Hooft アノマリー**という概念を用意しておこう．今調べたいのは対称性の性質であるから，Noether の保存カレント j^μ の相関関数を計算したい．そのために便利な生成汎関数として，

$$\mathcal{Z}[A] = \left\langle \exp\left(\mathrm{i} \int A_\mu j^\mu \right) \right\rangle \tag{3}$$

というものを考える．これがあれば，たとえばカレントの相関関数を

$$\langle j^\mu(x) j^\nu(y) \rangle = (-\mathrm{i})^2 \frac{\delta^2 \mathcal{Z}[A]}{\delta A_\mu(x) \delta A_\nu(y)} \Big|_{A=0} \tag{4}$$

などと形式的にすべて与えることができる．ただし，この生成汎関数を具体的に計算できるのは問題が解けてしまう場合のみなので，これ自身を計算しようというのではない．ここから解けない理論でも厳密に計算できる量（'t Hooft アノマリー）を抽出しよう，という試みである．

アノマリー (=異常) というからには，$\mathcal{Z}[A]$ に関して何らかの期待される性質が実は成立しない．その期待される性質とは，$\mathcal{Z}[A]$ の**ゲージ不変性**である．Noether の定理によると，連続対称性があるとそれに伴うカレント j^μ があり，保存則

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{5}$$

が成立する．さて，これが正しいならそのカレントに対する外場 A_μ(これを背景ゲージ場と呼ぶ)に対して，

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \theta \tag{6}$$

という全微分だけずらす変換，ゲージ変換，を考えたときに，生成汎関数の不変性

$$\mathcal{Z}[A + \partial\theta] = \mathcal{Z}[A] \tag{7}$$

が期待される．なぜなら，

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[A+\partial\theta] &= \left\langle \exp\left(\mathrm{i}\int (A_\mu+\partial_\mu\theta)j^\mu\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \exp\left(\mathrm{i}\int (A_\mu j^\mu - \theta\partial_\mu j^\mu)\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \exp\left(\mathrm{i}\int A_\mu j^\mu\right)\right\rangle . \qquad (8)\end{aligned}$$

ここで，1 行目から 2 行目に行くときに部分積分を行い，2 行目から 3 行目に行くときに Noether の保存則 (5) を用いた．3 行目は $\mathcal{Z}[A]$ の定義 (3) そのものである．

この素朴には期待される $\mathcal{Z}[A]$ のゲージ不変性が量子場の理論では成立しないことがあり，これを 't Hooft アノマリーと呼ぶことにしよう．具体的には，生成汎関数がゲージ変換により

$$\mathcal{Z}[A+\partial\theta] = \mathcal{Z}[A]\exp\left(\mathrm{i}\mathcal{A}[\theta, A]\right) \qquad (9)$$

と背景ゲージ場 A およびゲージ・パラメータ θ で与えられる位相 $\mathcal{A}$ だけずれるときに，$\mathcal{A}$ をこの理論の 't Hooft アノマリーと呼ぼう．なぜ素朴な期待が不成立なのかは，場の理論のくりこみと密接に関係しており，藤川氏の記事に詳しく議論されている．ここまでの議論では，連続対称性（とくに $U(1)$ 対称性）を仮定しているような議論をしたが，これは全く任意の対称性で定義できる概念であり，最近ではその分類学は非常に進展している．

さて，'t Hooft アノマリーなるものを定義したが，その特徴として顕著なのが，

1. 解くことのできない強結合理論であっても計算可能な量である
2. 低エネルギーの有効自由度だけを用いて，同じ 't Hooft アノマリー $\mathcal{A}$ が再現できる

という二点がある．第 1 の点は実際の応用を考える上で大切で，魅力的な性質を持つ物理量 (例えば $\mathcal{Z}[A]$ そのもの) であっても具体的な計算ができなければ使うことは難しい．そして，第 2 の点こそが 't Hooft アノマリーの魅力である．例えば QCD の場合に高エネルギーの自由度であるクォークと低エネルギーの自由度であるハドロンは全く違ったものに見えて，この間を満足につなぐことは難しい．しかし，アノマリー $\mathcal{A}$ はそのつながりを知らなくとも，2 つの自由度をつかって同じ値を与えなくてはならない不変量になっているというのである．これを 't Hooft のアノマリー・マッチングという．次に見るように，これは QCD の低エネルギー有効理論の可能性を制限する．

3.2 カイラル対称性の 't Hooft アノマリー

さて，それでは QCD の物理に話を戻そう．QCD には，クォークのカレント質量 m_f をゼロにする極限でカイラル対称性 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ があるのだった．先程の考えに従って，$SU(N_f)_{L,R}$ の背景ゲージ場 L, R をそれぞれ導入して，QCD での生成汎関数 $\mathcal{Z}[L, R]$ を定義しよう．

さて，この $\mathcal{Z}[L, R]$ が持ちうるアノマリーであるが，その可能な形式は Wess と Zumino による無矛盾性条件で厳しく制限される[5]．これは歴史的には無矛盾な非可換アノマリーと呼ばれ，その無矛盾性条件を満たす解を一つ発見するトポロジカルな方法がある．それは Stora と Zumino によるアノマリー降下方程式として知られていて，6 次元のアーベリアン・アノマリーに適用することで非可換アノマリーが得られることがわかっている．

QCD のカイラル·カレントの生成汎関数 $\mathcal{Z}[L, R]$ は我々の住む 4 次元時空上の理論としてはゲージ不変性を実現せず，'t Hooft アノマリーを持つ．しかしアノマリー降下方程式の帰結として，1 次元高い 5 次元時空上のトポロジカル理論である Chern-Simons 理論の境界として QCD を実現し，

$$\mathcal{Z}[L, R]\exp\left(\mathrm{i}N_c\,\mathrm{CS}_{5\mathrm{dim}}[L, R]\right), \qquad (10)$$

という複合系を考えると全体ではゲージ不変性が保たれる．これは，QCD の 't Hooft アノマリー $\mathcal{A}$ を完全に指定する．

それでは，以上の知識に基づいて，アノマリー・マッチングを QCD に適用してみよう．ここで得られる重要な結論は，

- QCD の質量ギャップは，クォークのカレント質量をゼロにする極限で消えなくてはならない

ということである．

このことを見るために，QCD の質量ギャップ

が消えないと仮定して，矛盾を導こう．質量ギャップが存在すると，すべての局所相関関数は距離の関数として指数的に減少する．このことから，その質量ギャップより低いエネルギーに着目すると生成汎関数 $\mathcal{Z}[L,R]$ の位相部分は 4 次元の**局所的な作用** $S_{4\mathrm{dim}}[L,R]$ を用いて $\mathcal{Z}[L,R] = \exp(\mathrm{i}S_{4\mathrm{dim}}[L,R])$ とかけてしまう．このような 4 次元の局所的な汎関数で，Chern-Simons 理論の境界におけるゲージ依存性を再現することはできないので，矛盾である．同じことだが別の言い方をすれば，非可換アノマリーは BRST-closed だが exact でない量として特徴づけられており，質量ギャップが開くと BRST-exact なものしか得ることができないので，矛盾を避けるには質量ギャップを消すしかない．

カイラル対称性が自発的に破れると，南部-Goldstone の定理から無質量の π 中間子らが要求されるので，自然とアノマリー・マッチングの制限を満たし，低エネルギーのラグランジアンに Wess-Zumino-Witten 項の存在を要求する．さらに，現実に背景ゲージ場の一部が電弱理論のゲージ場として実在するため，'t Hooft アノマリーそのものが中性 π 中間子の崩壊過程から観測できているのも面白い．歴史的には，この実験と理論の良くあったことから強い力の理論を $SU(N_c)$ ゲージ理論としたときの $N_c = 3$ を決定した[6]．

ここまでが，およそ'80 年代までのアノマリー・マッチングの成果である．最近の話に入る前に誤解を招かないように，いくつかの注意を述べておきたい．アノマリー・マッチングは質量ギャップが消えることを要求するが，これは必ずしも自発的対称性の破れに伴う南部-Goldstone 粒子の存在を要求するわけではなく，例えば陽子や中性子の質量が消えていても良いし，低エネルギーの共形場理論であってもよい．そのため，なぜカイラル対称性が破れるのか，という疑問を対称性とアノマリーだけから完全に解決することはできず，そのためには QCD のダイナミクスをより理解する必要がある．それより弱い部分的な結果とはいえ，人間が手で解けない問題から対称性に伴うアノマリーを見つけだし，質量ギャップの消失という厳密な結果が得られたこと，さらにアノマリー・マッチングをする自由度を仮定したときの新しい低エネルギー定理を得たことは特筆すべき結果といって良いであろう．

4. 新しい対称性，新しいアノマリー，そして非自明なドメイン・ウォール

さて，これまで QCD における'80 年代のアノマリー・マッチングの帰結を見てきたが，この技術が今になりなぜ再び注目を集めているのだろうか．それは，4 次元ゲージ理論において，新たなアノマリーが発見されたことでその応用が非常に広大になったことにある．そして，その背後には，そもそも対称性の概念そのものが新しくなった，というのが大きな契機となっている．

4.1 1-form 対称性とトポロジカル秩序

新しい対称性である **1-form 対称性**が導入されたきっかけは，物性物理における**トポロジカル秩序**の発見とその理論的な理解の進展が大きく絡んでいる．それ以前は，Landau による物質の相の分類に従い，真空に非自明な縮退があることは対称性の自発的破れに伴うと考えられており，局所演算子の相関関数だけから場の理論の性質は決定できていた．しかし，対称性の破れを伴わないのにも関わらず，非常に普遍的な真空の縮退が現れうることが分数量子ホール効果などを通じて明らかになり，そのような量子多体系はトポロジカル秩序にある，というようになった．その大きな特徴は，(1) 真空の数が空間のトポロジーのとり方に依存し，(２) エニオンに代表される非自明な統計性や相互統計性をもつ試験電荷が存在する，ということである．

このような発見は，これまで考えられていた場の理論の基礎的概念そのものの変更を要求する．例えば，場の量子論のヒルベルト空間はどのようにつくるのか，といえば真空ベクトルに局所演算子を作用させて得られる状態すべてを集めてくれば良い (Gelfand–Naimark–Segal 構成法), と思わ

れていた．しかし，トポロジカル秩序を特徴づける試験電荷はダイナミカルな場の局所演算子で作ることができないので，この構成法の範囲ではトポロジカル秩序という高い普遍性を持つ量子相を得ることはできない．量子場の理論はラグランジアンやそれに伴う局所演算子を指定するだけでは十分に特徴づけられないことがあり，どのような試験電荷の組を理論の局所性，ユニタリティと相性の良い範囲で指定するのか，ということまで含めて考える必要が出てきたのだ[7]．

このことを認めると，新しい対称性も自然に導入したくなってくる．これまでの対称性は，局所演算子を非自明に作用する変換のうち，系のエネルギーを不変に保つようなもののことを指していた．しかし，理論を特徴づけるために試験電荷を導入したのだから，その電荷を測定する変換で系のエネルギーを不変に保つものも考えるべきではないだろうか．これが，higher-form 対称性と呼ばれるもので[8]，試験電荷が粒子，ストリング，... であったとすると，対応する対称性をそれぞれ 1-form, 2-form, ... 対称性と呼んでいる．そして，このような higher-form 対称性の破れがあると，対応する低エネルギー定理の結果として有効理論はトポロジカルな場の理論を含む必要がある．

4.2 1-form 対称性のアノマリー

せっかく新しい対称性を手に入れたのだから，それをゲージ化してみよう．具体的な模型として，QCD ラグランジアン (1) の第一項で与えられる Yang-Mills 理論を考えよう：

$$\mathcal{L}_{\rm YM} = \frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}(F\wedge\star F)+\frac{\mathrm{i}\theta}{8\pi^2}\mathrm{tr}(F\wedge F). \quad (11)$$

ここでは，カラー場の運動項である第一項に加えて，トポロジカルな θ 項を加えた．θ 項は，その時空積分が整数に量子化され，

$$\int \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}(F\wedge F)\in\mathbb{Z}, \quad (12)$$

このために物理量は θ について周期性 $\theta\sim\theta+2\pi$ を持つ．また，θ 項は時間反転変換 T のもとで $\theta\mapsto-\theta$ と符号を反転するため，理論が時間反転のもとで不変なのは先の周期性を考慮すると $\theta=0,\pi$ の 2 点に限られる．

この模型には，QCD と違いクォークがラグランジアンにいないので，普通の対称性の意味でクォークを変換することはできない．しかし，試験電荷としてのクォークを用意して，その間にどのような力が働くのか，といったことを調べることは可能である．そして，このような試験電荷を変換する対称性こそ 1-form 対称性と呼ぶのだったが，今の場合 $\mathbb{Z}_{N_c}$ の 1-form 対称性が $SU(N_c)$ Yang-Mills 理論に存在する．

この 1-form 対称性に対する背景ゲージ場は $\mathbb{Z}_N$ 2-form ゲージ場 B と呼ばれるもので，具体的には 't Hooft の磁束に対応する捻られた境界条件を考えることになる．これを導入すると，θ 項の量子化条件 (12) が変更を受け，

$$\int \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}(F\wedge F)\in\mathbb{Z}+\frac{1}{N_c}, \quad (13)$$

というズレが生じる[9]．その結果として，$\theta=\pi$ の分配関数は時間反転のもとで

$$\mathsf{T}: Z_{\theta=\pi}[B]\mapsto Z_{\theta=\pi}[B]\exp(2\pi\mathrm{i}/N_c) \quad (14)$$

という位相の不定性が出る．これは，時間反転と 1-form 対称性を同時にゲージ化することはできないという，混合 't Hooft アノマリーとして理解され，アノマリー・マッチングが同じように議論できる[10]．特に，Dashen が現象論的ラグランジアンの範囲内で予期した時間反転対称性の自発的破れが Yang-Mills 理論の $\theta=\pi$ でのアノマリー・マッチングを満たす，ということが示される．より正確には，N_c が奇数ならこれは局所相殺項で消せてしまうためアノマリーではないのだが，global inconsistency 条件というものがその代わりを果たす[10][11]．詳しくは菊池氏の記事を参照されたい．

改めて強調したいのは，この新しいアノマリーが見つかったのは，場の理論の基礎的な部分自体の発展があり，それに伴う対称性という概念自体を新たにし，そのゲージ化といった技術的な点も含めた進展に支えられている，ということである．そして，それは物性，素粒子，超弦理論といった様々な方面からの発展がうまく組み合わさった結

果である．

さて，Yang-Mills 理論の $\theta = \pi$ でアノマリー・マッチングを満たすためには，まず時間反転を自発的に破れば良い．ただ，QCD の 't Hooft アノマリーが π 中間子の存在だけでなく，その崩壊過程にも意味のある制限を与えたように，このアノマリーも時間反転の破れた 2 つの真空の間の非自明な関係を明らかにする．たとえ各真空の上でクォークの閉じ込めが起こっていたとしても，その 2 つの真空の間をつなぐドメイン・ウォールの上ではクォークが自由に動けるようになる[10)12)]．物性物理の言葉を借りると，θ 角を $\theta = \pi$ から少しずらすと，その方向に応じて片方は自明な相，もう片方は $\mathbb{Z}_{N_c}$ 1-form 対称性で守られた非自明な SPT 相になっており，ドメイン・ウォールはその SPT の境界に対応するのでアノマリー・インフローの議論から非閉じ込めが起きる，というのである．

5. QCD の新しいアノマリーとその応用

先程見たのは，QCD のクォークが試験粒子としてのみ存在する場合に，1-form 対称性という新しい対称性が存在して，それに伴った新しいアノマリーが見つかった，ということだった．では，QCD そのものに対してはどうだろうか．このときは，試験粒子の電荷を変化させるとダイナミカルなクォークも同じく変換を受けてしまうので，1-form 対称性は存在しない．

しかしながら，クォーク場の対称性をより詳しく見ると，その対称性は正しくは

$$G = \frac{SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)}{\mathbb{Z}_{N_c} \times \mathbb{Z}_{N_f}} \quad (15)$$

という商群として与えられることがわかる．この事実は，$\mathbb{Z}_{N_c} \times \mathbb{Z}_{N_f} \subset SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)$ という部分群は，物理的な局所演算子を非自明に変換しないので，局所演算子の空間に忠実な表現を持つような群はその自明な分だけ割った G で与えられる，ということから来ている．

ここで興味深いのは，この対称性 G に背景ゲージ場を導入すると，通常のゲージ場のみでなく，あたかも 1-form 対称性をゲージ化した時のように $\mathbb{Z}_{N_c} \times \mathbb{Z}_{N_f}$ 2-form ゲージ場が導入される，ということにある．QCD のようにその対称性はすでによく知っていたつもりだった理論に対しても，このようによりよく見てみると新しいゲージ場が導入され，そこから新しいアノマリーが出てくることがある．QCD の場合には，バリオン数カレント J_B の保存則が，

$$\mathrm{d}J_B = \frac{N_f}{(2\pi)^2} B_f \wedge \mathrm{d}A_\chi, \quad (16)$$

というように，2-form ゲージ場 B_f と離散カイラル・ゲージ場 A_χ のもとでアノマリーを持つ，ということが分かった[13)]．この新しく見つかった QCD のアノマリーの帰結を QCD 相図の文脈でいくつか見て見よう．

5.1 Roberge-Weiss 相転移

QCD の高温相を調べるときに，クォーク場の位相を回す $U(1)$ 対称性に対してホロノミー ϕ を手で導入することができる．これに温度をかけたものは純虚数のクォーク化学ポテンシャルに見えることから，虚数化学ポテンシャルともしばしば呼ばれる．分配関数は，実際の $U(1)$ 対称性が $U(1)/\mathbb{Z}_{N_c}$ であることに対応して，$\phi \sim \phi + \frac{2\pi}{N_c}$ という周期性を示すが，高温相でクォークが非閉じ込め状態にあると思うなら自然な周期性は 2π である．もし高温で（準）安定状態が N_c 個存在して，各々は 2π 周期性を満たしつつ，ϕ を $2\pi/N_c$ だけずらしたときにそれらの間で 1 次相転移が起これば，この 2 つの要件を問題なく満たすことができる．この 1 次相転移を Roberge-Weiss 相転移と呼ぶ[14)]．

この相転移に対して最近になり分かったことは，アノマリー・マッチングのために 1 次相転移もしくはカイラル対称性の自発的破れが要求されていたということだ[15)]．低温ではカイラル対称性を破ることで，高温では Roberge-Weiss 相転移を起こすことでアノマリー・マッチングを満たしていたのである．

また，高温での 1 次相転移直上では，2 つの安定状態が存在するので，その間をつなぐ 2 次元のドメイン・ウォールを考えることができる．この

ドメイン・ウォールにもアノマリー・インフローの議論ができ，2 次元のカイラルアノマリーをもつ理論（例えば $SU(N_f)$ WZW 模型）が実現されている必要がある[16]．このようなことは，アノマリーによる再考をしたために，新しく分かった Roberge-Weiss 相転移の物理である．

5.2 $\mathbb{Z}_N$-twisted QCD

似たような虚数化学ポテンシャルの理論に $\mathbb{Z}_N$-twisted QCD と呼ばれるものがある．これは，$N_c = N_f = N$ である QCD に対して，クォークの虚時間方向の境界条件を

$$q_f(\tau + \beta) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} f} q_f(\tau) \tag{17}$$

というように取る[17]．この境界条件の特徴として，試験電荷である Polyakov loop の位相を回す $\mathbb{Z}_N$ 対称性が存在するので，これをオーダー・パラメータとする閉じ込め・非閉じ込め相転移を議論することができる．

この閉じ込めの定義を採用するなら，アノマリー・マッチングの帰結として，

- 閉じ込め $\Rightarrow$ カイラル対称性の自発的破れ

という，QCD の重要な低エネルギー現象の 2 つに明確な対応関係を証明できる[18]．これらの虚時間方向の境界条件を捻った有限温度 QCD 系に対して，’80 年代に発見されたアノマリーをつかったアノマリー・マッチングを適用することはできず，これらの結論は 2-form ゲージ場をうまく使ったことで得られたことを強調しておきたい．

6. 最後に

アノマリー・マッチングは，強結合理論を調べる上で有用な手がかりを与えてくれる．本稿では，筆者も関わった QCD のアノマリーの研究に関して足早にではあるがレビューを試みてみた．筆者がこの研究に関わる前に思っていた正直な印象は，アノマリー・マッチングの研究は’80, ’90 年代のそれに尽くされているのではないか，ということだった．しかし，新しい対称性の発見，それに伴う新しいアノマリーの発見があり，まだまだ未開拓の領域がこれだけ広がっていたことのは筆者には大変な衝撃だった．

それでは最後に，そもそも人類は対称性と呼ぶべきものをすべて手に入れているのだろうか？という問いかけをして本稿を締めたいと思う．

参考文献

1) A. Jaffe, E. Witten, Quantum Yang-Mills theory.
2) Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345; Phys. Rev. 124 (1961) 246.
3) S. Weinberg, PRL 18 (1967) 188; S. Coleman, J. Wess, B. Zumino, Phys. Rev. 177 (1969) 2239.
4) G. ’t Hooft, Recent Developments in Gauge Theories (1979); Y. Frishman, A. Schwimmer, T. Banks, S. Yankielowicz, NPB177 (1981) 157.
5) J. Wess, B. Zumino, PLB 37 (1971) 95.
6) S. Adler, Phys. Rev. 177 (1969) 2426; J. Bell, R. Jackiw, Nuovo Cim. A60 (1969) 47.
7) O. Aharony, N. Seiberg, Y. Tachikawa, JHEP 08 (2013) 115.
8) D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, B. Willett, JHEP 02 (2015) 172.
9) P. van Baal, Commun. Math. Phys. 85 (1982) 529.
10) D. Gaiotto, A. Kapustin, Z. Komargodski, N. Seiberg, JHEP 05 (2017) 091; D. Gaiotto, Z. Komargodski, N. Seiberg, JHEP 01 (2018) 110.
11) Y. Tanizaki, Y. Kikuchi, JHEP 06 (2017) 102; PTEP 2017 (2017) 113B05.
12) M. Anber, E. Poppitz, T. Sulejmanpasic, PRD 92 (2015) 021701; Z. Komargodski, T. Sulejmanpasic, M. Ünsal, PRB 97 (2018) 054418.
13) Y. Tanizaki, JHEP 08 (2018) 171.
14) A. Roberge, N. Weiss, NPB 275 (1986) 734.
15) H. Shimizu, K. Yonekura, PRD 97 (2018) 105011; K. Yonekura, JHEP 05 (2019) 062.
16) H. Nishimura, Y. Tanizaki, JHEP 06 (2019) 040.
17) H. Kouno, et. al., J. Phys. G39 (2012) 085010; E. Poppitz, T. Sulejmanpasic, JHEP 09(2013)128; T. Iritani, E. Itou, T. Misumi, JHEP 11(2015)159.
18) Y. Tanizaki, T. Misumi, N. Sakai, JHEP 12 (2017) 056; Y. Tanizaki, Y. Kikuchi, T. Misumi, N. Sakai, PRD97 (2018) 054012

（たにざき・ゆうや，ノースカロライナ州立大学）